série révision 2

Exercice N°1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+2\ln(x)$

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-x$

a) Dresser le tableau de variation de h

b) Montrer que l'équation f(x)=x admet exactement deux solutions qui sont 1 et $\alpha\in]3,4[$

3/ a) Montrer que pour tout x de $]3,4[$, on a : $0\le f'(x)\le\dfrac{2}{3}$

b) En déduire que pour tout x de $]3,4[$, on a : $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|x-\alpha|$

4/ On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0=3\\ U_{n+1}=f(U_n)\ ,\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $3\le U_n\le 4$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{2}{3}|U_n-\alpha|$

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_n-\alpha|\le(\dfrac{2}{3})^n$ .En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

Exercice N°2

Les points A. B et C ont pour coordonnées respectives: A (3 ; – 2 ; 2), B (6; 1 ; 5) et C (6; – 2 ; – 1).

I. 1) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2) Soit P le plan d'équation cartésienne : x + y + z – 3 = 0. Montrer que P est perpendiculaire à la droite (AB) et passe par le point A.

1) Soit Q le plan perpendiculaire à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de Q.

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et Q.

II. 1) Soit le point D (0 ; 4 ; - 1).Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2) Calculer le volume du tétraèdre ABDC.

3) Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.

4) a) Calculer l'aire du triangle BDC.

b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

III. Soit S l'ensemble des points M(x,y ,z) de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-9x-5y-z+2=0$

1) Démontrer que S est une sphère de centre $\Omega\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\dfrac{3\sqrt{11}}{2}$.

2) Vérifier que la sphère S est circonscrite au tétraèdre ABCD.

3) Montrer que l'intersection du plan (ABC) et S est un cercle ζ à caractériser

Exercice N°3

Une urne contient deux jetons blancs numérotés : 1 , -1 et trois jetons noirs numérotés 1,1,-1. Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

1/ On tire simultanément deux jetons de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur »

B : « Obtenir deux jetons de même couleur et de même numéro »

b) On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur la somme des numéros inscrits sur les deux jetons tirés

Déterminer la loi de probabilité de X et Calculer son espérance mathématique

2/ On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne

On désigne par a le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et par b le numéro inscrit sur le deuxième.

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les plans P et P' d'équations respectives : $x+ay+b=0$ et $x+by-a=0$

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

C : « P et P' sont parallèles »

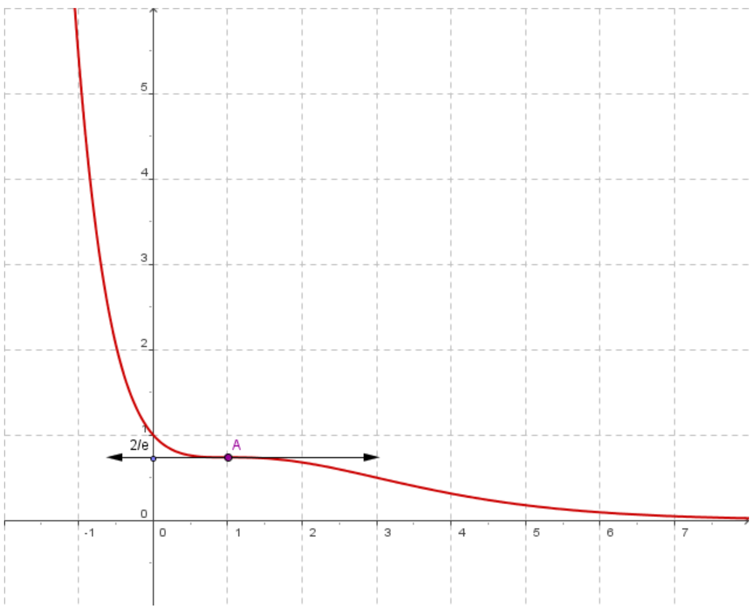
D : « P et P' sont perpendiculaires »

Exercice N°4

On considère une fonction f définie sur IR.

A) La courbe (C) ci-dessous est celle de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

* La courbe (C) de f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$
* La tangente à la courbe (C) au point $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ est parallèle à $(O,\vec{i})$.
* La droite $(O,\vec{i})$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.



En utilisant le graphe :

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Préciser le sens de variation de f.

3/ Déterminer f(1) et f '(1).

4/ Que représente le point A pour (C).

B) La courbe (C) est en fait celle de la fonction définie sur IR par $f(x)=(x^2+1)e^{-x}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respective x = 0 et x = n.

1/ A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I_n=\int_0^n xe^{-x}dx$.

2/ Vérifier que la fonction f vérifie : $f(x)=2xe^{-x}-f'(x)$.

3/ a) En déduire que $A_n=2I_n-f(n)+1$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.